

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

(Docente: Prof. P. Vetro)

PROVA SCRITTA DEL 17/01/2005

~~X~~ Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x - 2}$$

e tracciarne il grafico.

~~X~~ Non utilizzando la regola di de L'Hopital, calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x \sin x}.$$

~~X~~ Calcolare la derivata della seguente funzione

$$f(x) = (1 + \cos x)^{\tan \sqrt{x}}.$$

~~X~~ Calcolare il seguente integrale

$$\int e^x \cos 2x dx.$$

5. Determinare a e b in modo che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + a \sin x + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x = 0$.

~~X~~ La funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x| + (1 - x^2)$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle? Se ciò si verifica, si determini il punto $\alpha \in [-1, 1]$ tale che $f'(\alpha) = 0$.

7. Stabilire per quali valori di a , l'equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + 2y + 4 = 0$$

è quella di una circonferenza e se ne determinino centro e raggio.

$$y = (1 + \cos x)^{\operatorname{Tg} \sqrt{x}}$$

$$\log y = \log [(1 + \cos x)^{\operatorname{Tg} \sqrt{x}}]$$

$$\log(y) = \operatorname{Tg} \sqrt{x} \cdot \log(1 + \cos x)$$

$$(\log y)' = (\operatorname{Tg} \sqrt{x} \cdot \log(1 + \cos x))'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log(1 + \cos x) + \operatorname{Tg} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$y' = \left(\frac{(\log(1 + \cos x))'}{(\cos^2 \sqrt{x})^2 \cdot 2\sqrt{x}} - \frac{\operatorname{Tg} \sqrt{x} \sin x}{1 + \cos x} \right) (1 + \cos x)^{\operatorname{Tg} \sqrt{x}}$$

$$y = (1 + \cos x)^{\operatorname{Tg} \sqrt{x}}$$

$$\log(y) = \log((1 + \cos x)^{\operatorname{Tg} \sqrt{x}})$$

$$e^{\log y} = e^{\log((1 + \cos x)^{\operatorname{Tg} \sqrt{x}})}$$

$$y = e^{\operatorname{Tg} \sqrt{x} \cdot \log(1 + \cos x)}$$

$$y' = e^{\operatorname{Tg} \sqrt{x} \cdot \log(1 + \cos x)} \cdot \left[\frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log(1 + \cos x) + \operatorname{Tg} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \cdot (-\sin x) \right]$$

$$y' = e^{\operatorname{Tg} \sqrt{x} \cdot \log(1 + \cos x)} \left[\frac{\log(1 + \cos x)}{\cos^2 \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}} - \frac{\sin x \cdot \operatorname{Tg} \sqrt{x}}{1 + \cos x} \right]$$